

有限要素法による 二次元定常移流拡散問題の解析

2012年2月16日 学士卒業論文発表会

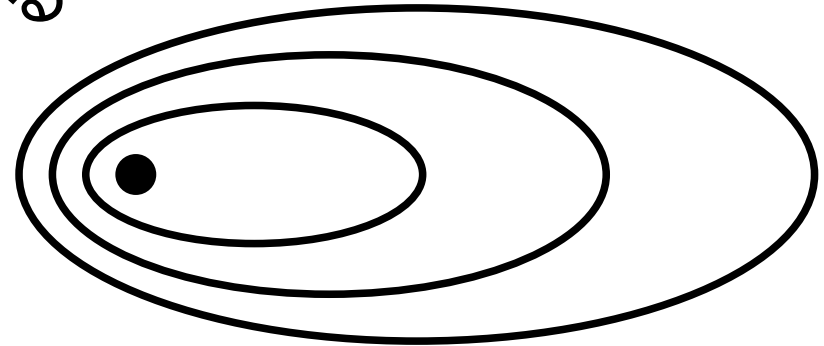
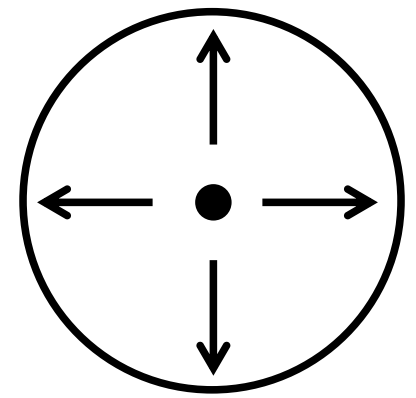
大阪工業大学 工学部 環境工学科

知能設計工学研究室

F08-037 妹尾 賢

はじめに

- 拡散：熱（物質）が温度（濃度）の高いところから低いところへ移動する
- 移流：流れによって運ばれる
- 移流拡散：移流と拡散が同時に起こる



- 環境工学における移流拡散現象の重要性
 - 汚染物質の分布の予測・把握
→ 対策・防止の面で重要な情報
- 本研究では熱を対象に移流拡散の挙動を解析

場の方程式

熱収支を取ることで導出

$$\underbrace{v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{移流項 (Advection term)}} - k \underbrace{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)}_{\text{拡散項 (Diffusion term)}} = 0$$

フーリエの法則

$v_x Q$
移流で運ばれる熱

比熱の関係式
 $Q = \rho C_p \Delta T$

$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$
拡散で運ばれる熱

記号	意味	単位	定義や条件
T	温度	K	位置に依存 $T(x, y)$
x, y	基準軸	m	領域の位置
v_x, v_y	x, y 方向への流速	m/s	一定値
k	温度拡散率	m ² /s	$k = \kappa / (\rho C_p)$
ρ	密度	kg/m ³	一定値
C_p	定圧比熱容量	J/(kg · K)	一定値
Q	熱量	J	$Q = \rho C_p \Delta T$
κ	熱伝導率	W/(m · K)	一定値
q	熱流束	W/m ²	$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$

有限要素法(Finite Element Method,FEM)

- (偏)微分方程式を近似的に解く手法

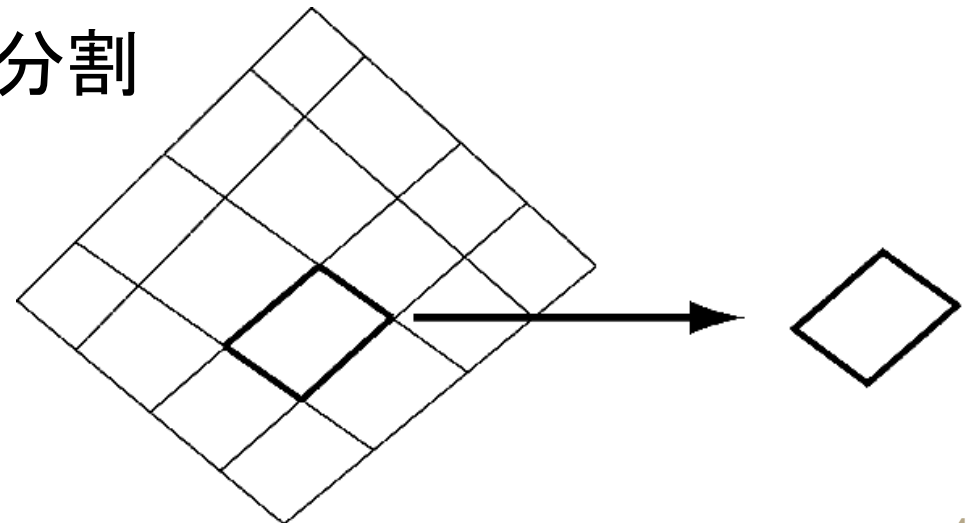
- 領域を要素に分割して、要素ごとに計算

→要素を全部足し合わせて領域を表現

- Galerkin法を使った重み付き残差法

- 複雑な領域形状の解析に有用

- 要素の選択・・・四角形で要素分割



重み付き残差法

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} - k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \\ T(\Gamma_1) = g_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2} = g_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} g_1, g_2 = \text{constant} \\ \mathbf{n} \text{ 単位法線ベクトル} \end{array}$$

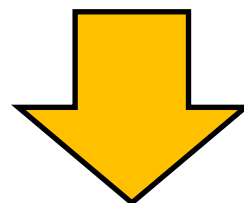
- 未知関数に近似解を代入
- あくまで近似なので誤差が生じる

$$T \rightarrow \hat{T}$$

→ 重み w をかけて全体で足して誤差を0にする

$$\int_{\Omega} \left(v_x \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) w d\Omega - k \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} \right) w d\Omega = 0$$

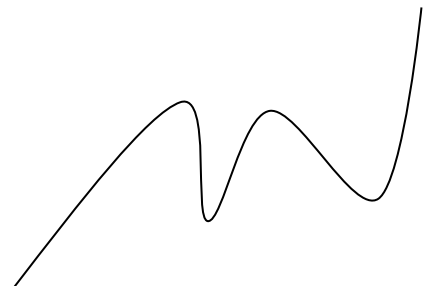
弱形式



- 拡散項の二階微分が難しい → 部分積分で一階微分へ

$$\int_{\Omega} \left(v_x \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) w d\Omega + k \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega = k \int_{\Gamma_2} g_2 w d\gamma$$

Galerkin 法



$$\approx \sin x + 3x + \dots?$$

- 近似関数 $\hat{T}$ の決め方

性質のわかっている関数（基底関数）を定数倍して足す

- 重み関数 w の決め方 → Galerkin 法の特徴

近似関数と同じ関数を使って近似

$$\hat{T} = \sum a_i \phi_i$$

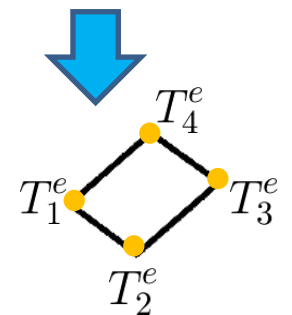
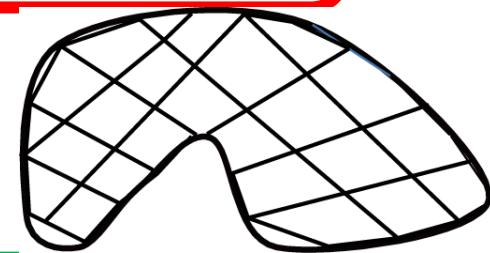
$$\hat{w} = \sum b_i \phi_i$$

$$\int_{\Omega} \left(v_x \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) \hat{w} d\Omega + k \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \right) d\Omega = k \int_{\Gamma_2} g_2 \hat{w} d\gamma$$

要素分割する理由

代入

- 基底関数 ϕ_i を領域全体で決めるのは困難
- 分割して要素内で決めるとまだ簡単



$$\hat{T} = \sum_{i=1}^4 N_i^e T_i^e = N_1^e T_1^e + N_2^e T_2^e + N_3^e T_3^e + N_4^e T_4^e$$

$$\hat{w} = \sum_{i=1}^4 N_i^e w_i^e = N_1^e w_1^e + N_2^e w_2^e + N_3^e w_3^e + N_4^e w_4^e$$

N_i^e 要素内の基底関数 = 内挿関数

行列表示

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 T_i^e w_j^e \int_{\Omega_e} \left(v_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) N_j^e \Omega + k \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 T_i^e w_j^e \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega = k g_2 \sum_{j=1}^4 w_j^e \int_{\Gamma_2} N_j^e d\gamma$$

$$w_e^T (A_e + D_e) T_e = w_e^T G_e \quad \xrightarrow{w_e \text{ 消去}} \quad (A_e + D_e) T_e = G_e$$

$$A_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_1^e \left(v_x \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \right) & N_2^e \left(v_x \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \right) & N_3^e \left(v_x \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \right) & N_4^e \left(v_x \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \right) \\ N_1^e \left(v_x \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \right) & N_2^e \left(v_x \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \right) & N_3^e \left(v_x \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \right) & N_4^e \left(v_x \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \right) \\ N_1^e \left(v_x \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \right) & N_2^e \left(v_x \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \right) & N_3^e \left(v_x \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \right) & N_4^e \left(v_x \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \right) \\ N_1^e \left(v_x \frac{\partial N_4^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \right) & N_2^e \left(v_x \frac{\partial N_4^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \right) & N_3^e \left(v_x \frac{\partial N_4^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \right) & N_4^e \left(v_x \frac{\partial N_4^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \right) \end{bmatrix} d\Omega$$

$$D_e = k \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \frac{\partial N_4^e}{\partial x} + \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \frac{\partial N_4^e}{\partial x} + \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \frac{\partial N_4^e}{\partial x} + \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \frac{\partial N_4^e}{\partial x} + \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega$$

$$T_e = \begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \\ T_3^e \\ T_4^e \end{Bmatrix}, \quad w_e = \begin{Bmatrix} w_1^e \\ w_2^e \\ w_3^e \\ w_4^e \end{Bmatrix}, \quad G_e = k g_2 \int_{\Gamma_2} \begin{Bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \\ N_4^e \end{Bmatrix} d\gamma$$

多元連立方程式を解くことで未知数 T の分布がわかる

プログラムへの実装

- 環境: Fortran言語で作成
- 定常拡散問題解析プログラム(開発済み)を改良

妥当性の確認

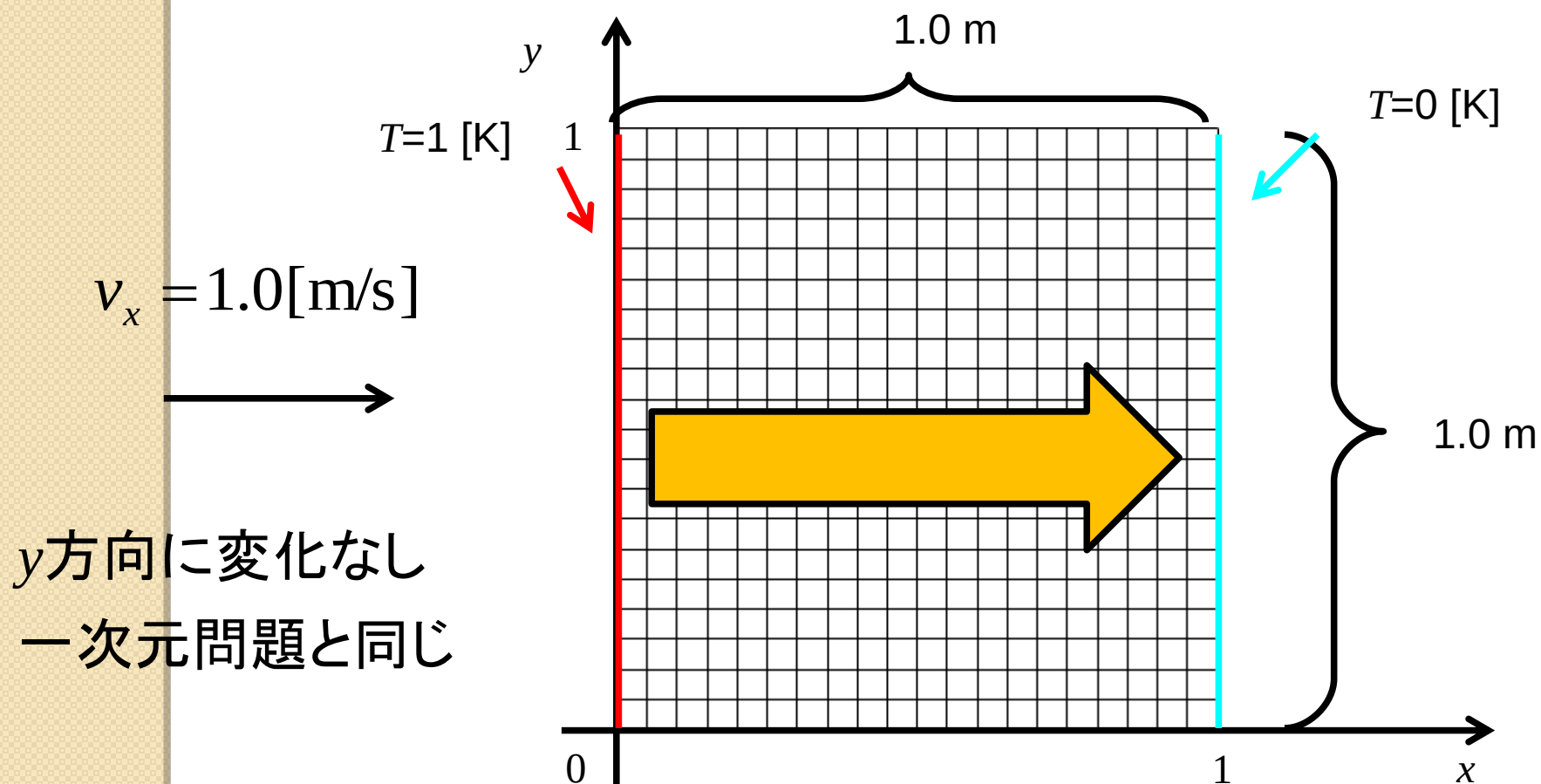
作ったはいいけれどあっている？

妥当性(validation)の確認...→他の結果と比較

- 一次元問題の理論解との比較
- 二次元問題への拡張

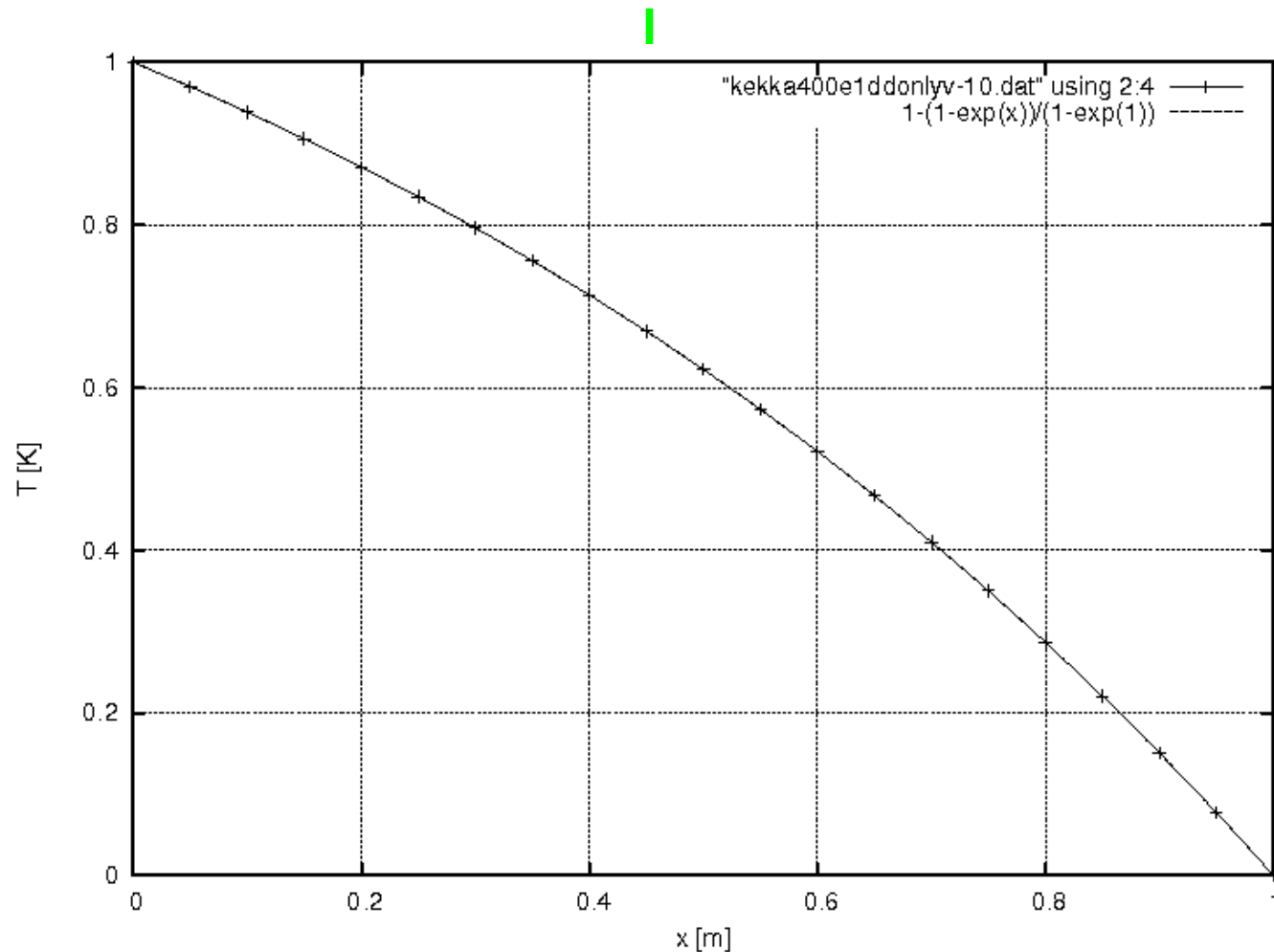
一次元問題の数値例

領域	$x=0 \sim 1, y=0 \sim 1$ の正方領域
要素分割	四角形(正方形)400個
流速	x 方向に $1.0[\text{m/s}]$, y 方向は $0.0[\text{m/s}]$
境界条件	$x=0$ に $T=1 [\text{K}]$, $x=1$ に $T=0 [\text{K}]$
拡散係数	$k=1.0 [\text{m}^2/\text{s}]$



理論解との比較

- 理論解は $T = 1 - \frac{1 - e^x}{1 - e}$ $T(0) = 1, \quad T(1) = 0$



働 ?

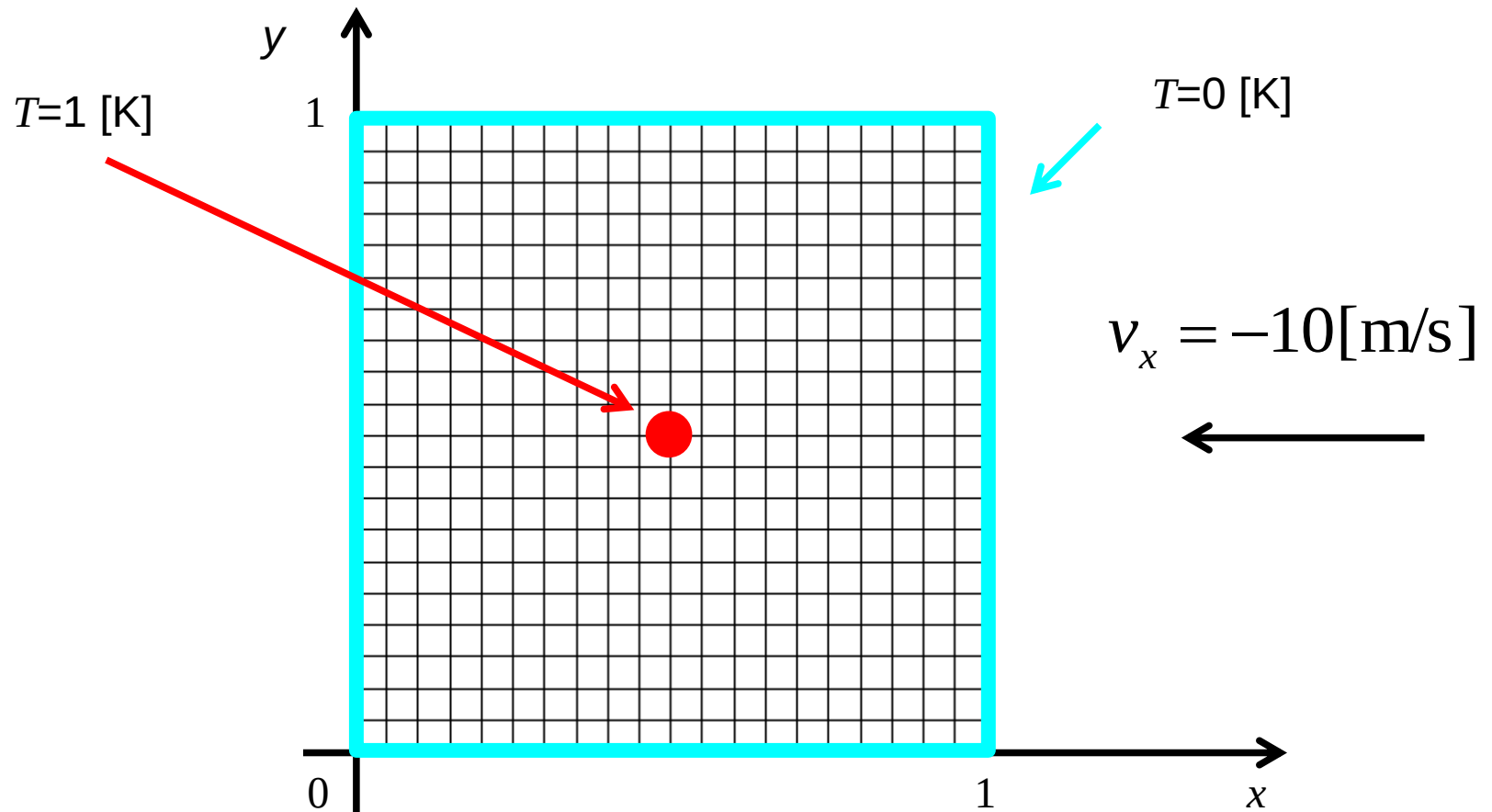
結果

流速を逆にすると一致

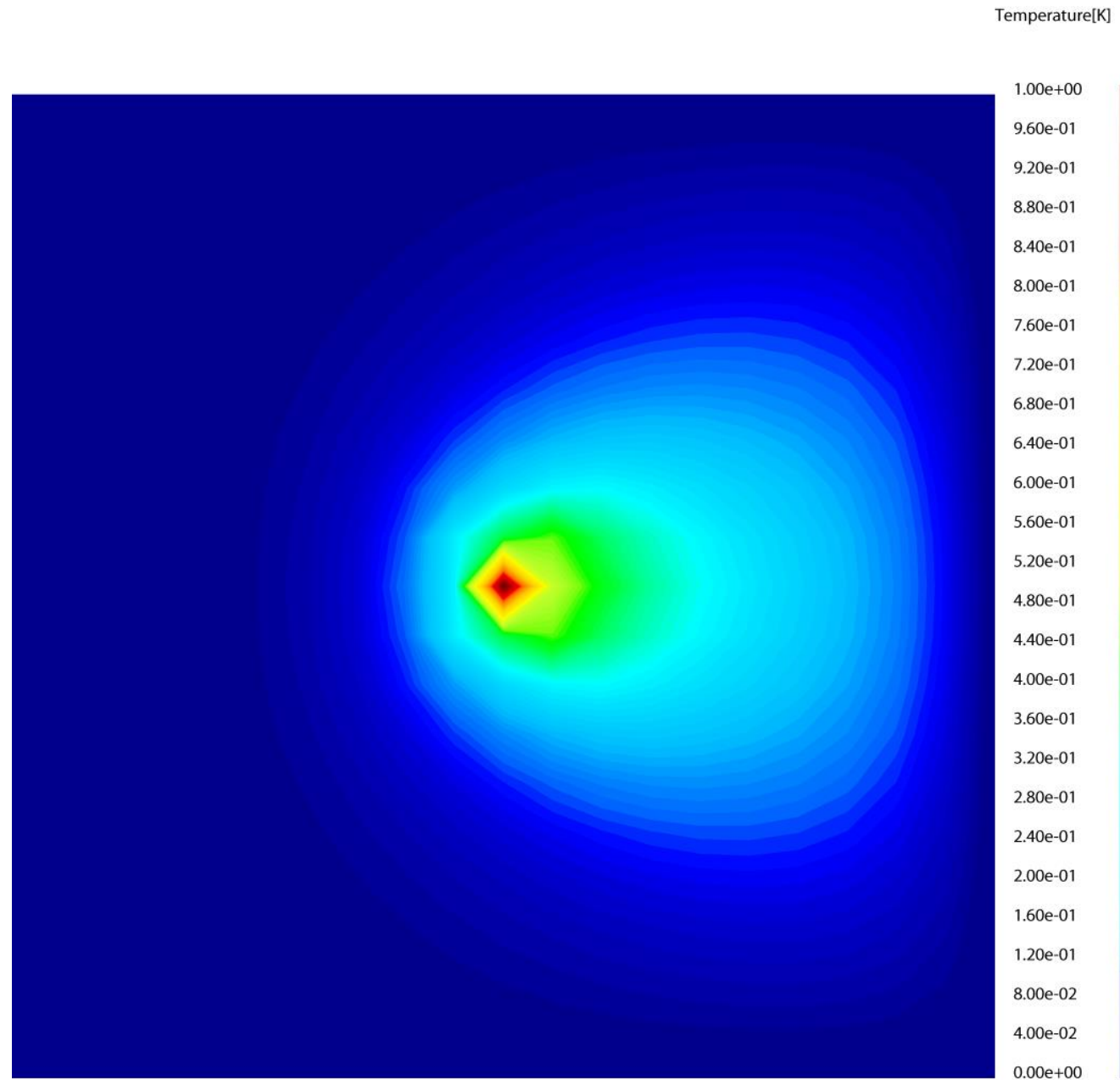
y方向にも同様な結果

二次元問題の数値例

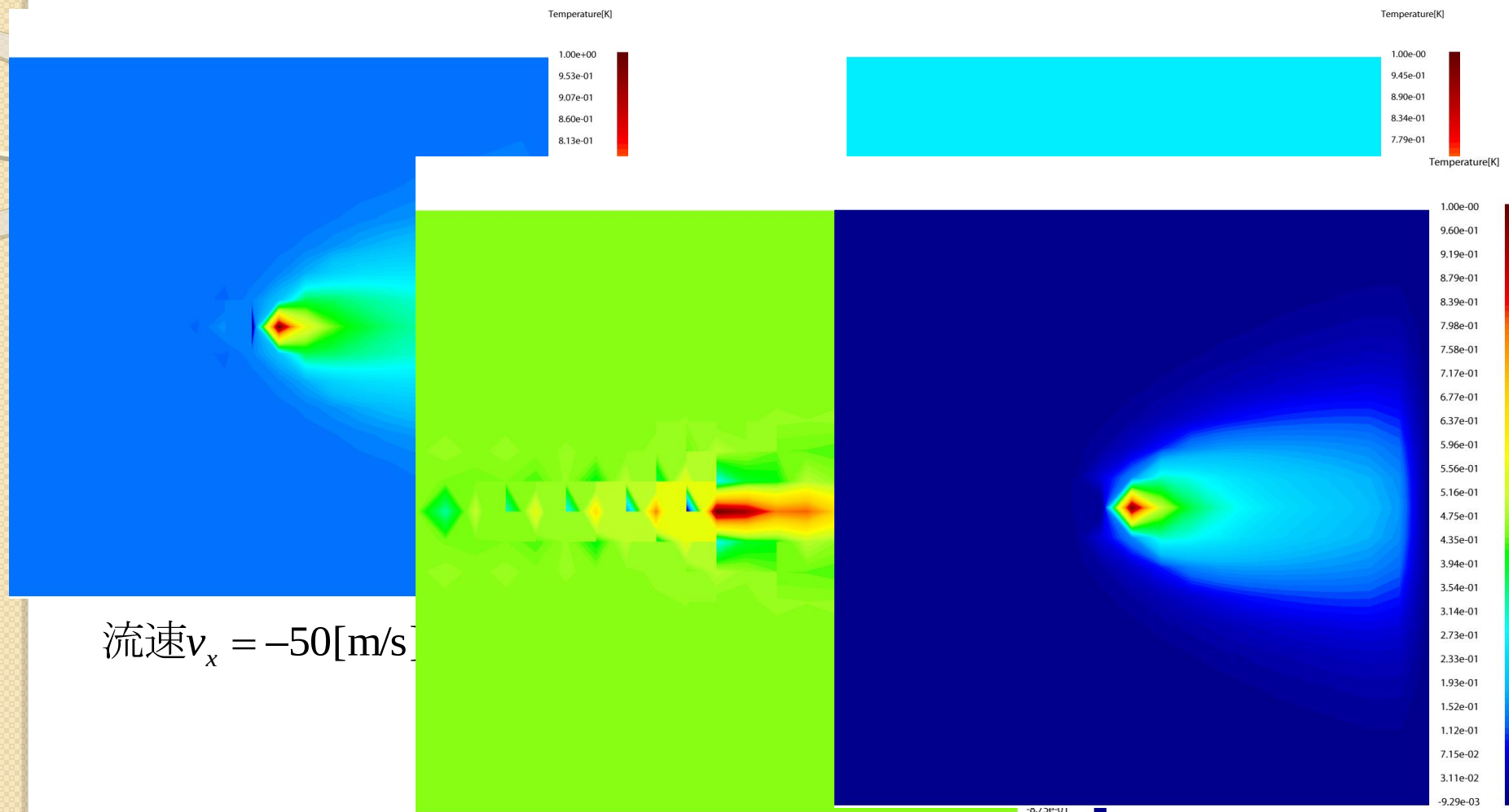
流速	x方向のみ-10[m/s]
境界条件	4辺に $T=0$ [K], 中心に $T=1$ [K],
領域	$x=0\sim 1, y=0\sim 1$ の正方領域
拡散係数	$k=1.0$ [m ² /s]



流速10m/s とした結果



流速を大きくすると・・・？



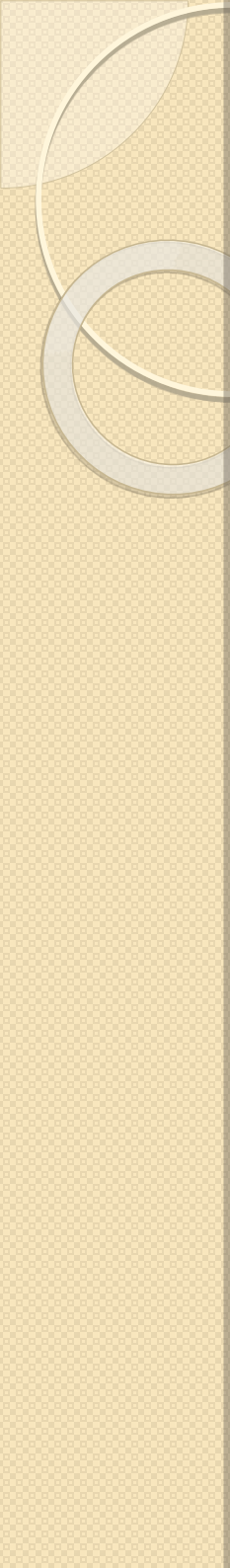
流速 $v_x = -50$ [m/s]

流速 $v_x = -500$ [m/s] 安定化を施した結果

解が不安定になる

おわりに

- 二次元定常移流拡散問題の有限要素方程式の導出を行った
- 移流項優位の場合の安定化対策を施したプログラムを開発した
- 一次元問題で妥当性を確認した
- 二次元問題でも妥当な結果が得られた
- 流れ方向が逆転する問題は未解決
- 数値例での安定化対策の確認は未実施



おしまい

ありがとうございました！！