有限要素法による二次元定常移流拡散問題の解析

大阪工業大学　工学部　環境工学科　知能設計工学研究室　F08-037　妹尾　賢

2012 年 2 月 16 日

1　背景と目的

環境工学において、エネルギーの観点から熱の高効率利用は、持続可能な社会を形成する上で重要な課題である。

このような考えのもと、本研究では熱の伝わりがどのような分布をするかということを解明する目的で研究を行った。

解明にあたり有限要素法という数値解析手法を用いた。領域全体の値の分布を可視化することで現象の解明にある。

2　場の方程式

拡散とは、温度・熱・物質（濃度）・圧力・運動量などが自発的に散らばり広がる現象を表す。熱における拡散現象はフーリエの法則と呼ばれ次の数式で表現される。$q = -\kappa \dfrac{\partial T}{\partial x}$

移流とは物質や圧力・温度・エネルギーなどの物理量が、流れによって運ばれれる現象である。移流によって運ばれれる熱は vQ となる。ここで、Q は比熱の関係式 $Q = \rho C_p dT$ により表される。熱流束による拡散と移流による熱の収支を取ることで、二次元定常移流拡散方程式は以下のように求まる。

$$\begin{cases} v_x \dfrac{\partial T}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial T}{\partial y} - k\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (\Omega\text{内}) & (2.1) \\ T = g_1 \quad (\Gamma_1\text{上}), \quad \dfrac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2 \quad (\Gamma_2\text{上}) & (2.2) \end{cases}$$

Ω は領域全体を表し、全境界を Γ として $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ を満たす。g_1, g_2 は境界条件値（一定）である。$\boldsymbol{n}$ は外向き法線方向を表す。ここに登場する記号の意味は表 1 を参照されたい。

表 1　記号の意味

記号	名称	単位	定義や条件
T	温度	K	未知関数 $T(x, y)$
x, y	基準軸	m	位置を示す
v_x, v_y	x, y 方向の流速	m/s	一定値
k	温度伝導率	$\mathrm{m^2/s}$	$k = \dfrac{\kappa}{\rho C_p}$
κ	熱伝導率	$\mathrm{W/(m \cdot K)}$	一定値
ρ	密度	$\mathrm{kg/m^3}$	一定値
C_p	定圧比熱容量	$\mathrm{J/(kg \cdot K)}$	一定値
q	熱流束	$\mathrm{W/m^2}$	$q = -\kappa \dfrac{\partial T}{\partial x}$

3　有限要素法の適用

有限要素法で解析するために、式 (2.1) に重み付き残差法と Galerkin 法を適用する。

3.1　重み付き残差法

求めたい値は温度 $T[K]$ である。しかし導出が困難である。近似解を $\hat{T}$ として考えると、$T \neq \hat{T}$ であるので誤差が生じ左辺 $\neq 0$ となってしまう。

この残差を 0 にするために、重み関数 w をかけて重み付き残差の和が領域全体で 0 になるように考える。

式 (2.1) が関数なので和は領域での積分になる。これを式で表すと以下のようになる。

$$\int_\Omega \left(v_x \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{T}}{\partial y}\right) w d\Omega - k \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2}\right) w d\Omega = 0 \qquad (3.1)$$

このように、関数に近似解を代入し重みをかけた和が 0 になるようにすることを重み付き残差法と呼ぶ。

3.2　Galerkin 法

T の近似として近似関数 $\hat{T}$ を導入した。$\hat{T}$ の近似方法として、既知の関数を任意定数倍して足し合わせる方法がある。ここで任意の既知関数（基底関数）を ϕ_i、その関数の係数を a_i とすると近似関数 $\hat{T}$ は式 (3.2) となる。

Galerkin 法とは、近似関数 $\hat{T}$ と同じ基底関数を重み関数 w にも導入して重みを近似する方法である。

w の近似関数を $\hat{w}$、係数 b_i とすると式 (3.2) で表される。

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^{m} a_i \phi_i, \qquad \hat{w} = \sum_{i=1}^{m} b_i \phi_i \qquad (3.2)$$

ここで m は近似に使う関数の数である。

3.3　弱形式の導出

$w = \hat{w}$ として、式 (3.1) の二階微分の項に対して部分積分を行い、微分の階数を落とした弱形式を式 (3.3) に示した。

$$\int_\Omega \left(v_x \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{T}}{\partial y}\right) \hat{w}\Omega + k \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial y}\frac{\partial \hat{w}}{\partial y}\right) d\Omega$$
$$= k \int_{\Gamma_2} g_2 w d\gamma \qquad (3.3)$$

重み付き残差法と Galerkin 法により、未知関数 T はそれの近似関数 $\hat{T}, \hat{w}$ に置き換わり、基底関数 ϕ は境界条件を満たすように決めればよいので、係数 a_i, b_i を求める問題へと帰着した。

しかし、複雑な領域を扱う際に基底関数 ϕ を決めるのは困難である。そこで、領域を単純な要素に分割し各要素について近似関数を考えることで基底関数を決定する。領域全体は要素ごとの結果を足し合わせて求まる。

3.4　有限要素方程式

要素内の基底関数を内挿関数 N_i^e とする。要素の頂点を節点と呼ぶ。四角形要素を用いると近似関数は式 (3.4) 及び式 (3.5) となる。

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^{4} N_i^e T_i^e = N_1^e T_1^e + N_2^e T_2^e + N_3^e T_3^e + N_4^e T_4^e \qquad (3.4)$$

$$\hat{w} = \sum_{i=1}^{4} N_i^e w_i^e = N_1^e w_1^e + N_2^e w_2^e + N_3^e w_3^e + N_4^e w_4^e \qquad (3.5)$$

ここで T_i^e, w_i^e はそれぞれ要素の節点 i での温度と重みであり定数である。これらを式 (3.3) に代入する。

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_i^e w_j^e \int_{\Omega_e} \left(v_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\right) N_j^e \Omega$$
$$+ k \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_i^e w_j^e \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\right) d\Omega$$
$$= k g_2 \sum_{j=1}^{4} w_j^e \int_{\Gamma_2} N_j^e d\gamma \qquad (3.6)$$

この式を行列を使って表すと以下のようになる。

$$\boldsymbol{w_e}^T (\boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{D_e}) \boldsymbol{T_e} = \boldsymbol{w_e}^T \boldsymbol{G_e} \qquad (3.7)$$

ここで、両辺に $\boldsymbol{w_e}^T$ があるため、これを除いて考えると 4 元の連立方程式となることがわかる。

$$(\boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{D_e}) \boldsymbol{T_e} = \boldsymbol{G_e} \qquad (3.8)$$

ここで $\boldsymbol{A_e}, \boldsymbol{D_e}, \boldsymbol{G_e}$ はそれぞれ移流項の行列、拡散項の行列、定数項のベクトルである。$\boldsymbol{T_e}$ は節点での温度を表すベクトルである。領域全体は有限要素式を全要素について足し合わせることで求まる。このようにして、多元連立方程式を解くことで領域全体の温度分布を求めることができる。

4　プログラムでの解析と結果

作成したプログラムの妥当性を確かめるために、理論解と比較した結果について述べる。

4.1　一次元移流拡散問題の理論解との比較

移流拡散方程式の理論解との比較を考える。二次元定常移流拡散方程式 (2.1) はこのままでは、理論解を求めることは難しい。しかし、一次元問題になれば理論解を求めることは可能である [2]。そこで、境界条件と流速を一次元問題と同じになるように決めて結果を比較した。

4.1.1　一次元移流拡散問題の理論解

一次元定常移流拡散問題の理論解について考える。

$$\begin{cases} v_x \dfrac{dT}{dx} - k\dfrac{d^2T}{dx^2} = 0 \ (0 < x < L) & (4.1) \\ T(0) = 1, T(L) = 0 & (4.2) \end{cases}$$

この問題は一階線形斉次微分方程式であるので理論式は

$$T = 1 - \frac{1 - e^{\frac{v_x}{k}x}}{1 - e^{\frac{v_x}{k}L}} = 1 - \frac{e^{\frac{v_x}{k}x} - 1}{e^{\frac{v_x}{k}L} - 1} \qquad (4.3)$$

となる。いま L=1 で、さらに $v_x = 1.0, k = 1.0$ とすると理論解は次の式である。

$$T = 1 - \frac{1 - e^x}{1 - e} \qquad (4.4)$$

4.1.2　x 方向に対する一次元問題との比較

グラフ描画ソフトである gnuplot で、この式と同じ条件となる表 2 の条件で解析を行った結果を図 1 に載せた。

表 2　解析条件

領域	1 [m]×1[m] の正方領域
要素分割	20×20 の四角形（正方形）要素 400 個
流速	$v_x = 1.0$ [m/s], $v_y = 0$ [m/s]
境界条件	左端に $T = 1$ [K], 右端に $T = 0$ [K]
温度伝導率	$k = 1[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$

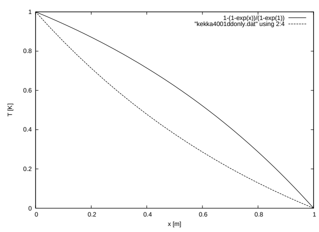

図 1　理論解との比較:$v_x = 1.0$ [m/s]

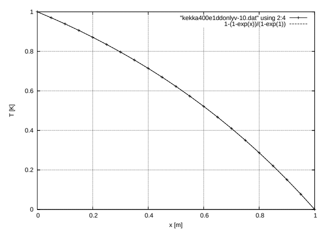

図 2　理論解との比較:$v_x = -1.0$ [m/s]

一次元問題の比較において流速が逆に働いているような結果が得られた。そこで、流速が逆に働いているのではないかと疑い、流速を逆にした結果を図 2 に示した。

この結果から、流速を逆にすると厳密解と結果が近いことがわかる。同様にして y 方向の一次元問題として解いても流速が逆に働いているような結果が得られた。

4.2　結果の予想できるものとの比較

一次元問題の比較で、流速が逆に働いているものの計算はできているような結果が得られた。そこで、結果の予想できるような条件で実行して予想通りとなるか結果を比較する。

解析条件は境界条件を領域の 4 辺に $T = 0$ [K],r 中心に $T = 1$ [K] として $v_x = -10$ [m/s] とした以外は表 2 と同じ条件とした。それを図にしたものを図 3、予想される結果を図 4 に示した。

この条件で実行した結果を図 5 に示した。この結果から、図 4 のように予想される結果が得られた。よって計算はできていると判断できる。

流速を $v_x = -500$ [m/s] とした結果を図 6 に示した。この結果では、領域で値がマイナスとなる箇所が存在している。この現象は $v_x = -30$ [m/s] 付近から観測された。このことから流速が大きくなると解が不安定になることがわかった。

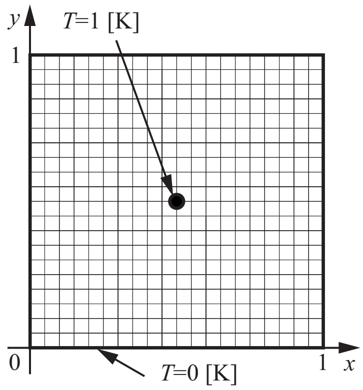

図 3　解析条件

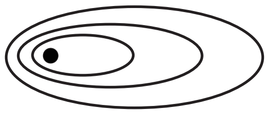

図 4　予想される結果

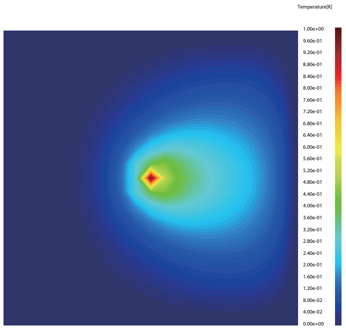

図 5　流速 $v_x = -10$ [m/s] とした結果

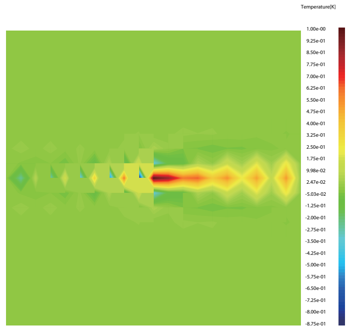

図 6　流速 $v_x = -500$ [m/s] とした結果

5　結論と検討課題

5.1　結果

本研究においては、熱の移流拡散問題を解くことを目的として、解析プログラムを作成してきた。実行結果としては流速が逆に働いているような結果が得られた。また、流速が大きくなると解が不安定になる問題が生じた。しかしながら、ある条件においてはそれらしい結果が得られた。

5.2　今後の課題

プログラムは未完成であるので、これを完成させるのが第一の課題である。移流が大きくなると解が不安定になる。解の安定化手法については文献 [2] に記載されている。これを参考に解の不安定性の問題に取り組みたい。

いま扱っている問題は定常問題で非定常問題には対応していない。そのため、非定常問題を解けるような解析プログラムを作る必要がある。また、要素選択において三角形要素もできるようにすべきである。密度や熱伝導率は通常、温度によって変化する。これを考慮した計算を行えるとなおよいと考える。

今回の研究では、流速の値は既知として解析者側で値を与えて解析を行った。しかし、通常流体の流速は領域内で不均一であり、値を求めるのは困難である。流体の流速を求める解析を行い、そこで得られた結果を使って移流拡散問題を解けるように将来的にはしていきたいと考える。

参考文献

[1] 菊池文雄『FEM+BEM=3 有限要素法概説 [新改訂版] -理工学における基礎と応用-』（サイエンス社, 2009）

[2] 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会『続・有限要素法による流れのシミュレーション』（シュプリンガー・ジャパン, 2008）

[3] 矢川元基, 吉村忍『有限要素法』計算力学と CAE シリーズ 1 （培風館,1991）